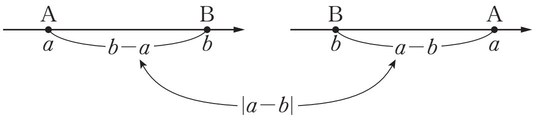
第21講　図形と方程式(1)

【基礎確認事項】

［1］　数直線上の点

□数直線上で，点Pに対応する数が a であるとき，a を点Pの**座標**といい，$\mathbf{P}(\boldsymbol{a})$ と書く．

□数直線上の点 $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$ の距離ABは



$$\mathrm{AB}=|b-a|$$

である．

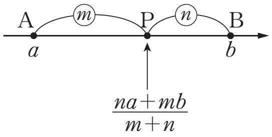
□線分ABを $m:n$ に**内分**する点を $\mathrm{P}(p)$ とする．

$a<b$ のとき

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n \iff (p-a):(b-p)=m:n$

$m(b-p)=n(p-a)$

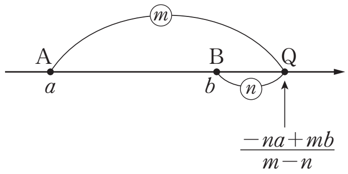
$(m+n)p=na+mb$　　よって　$p=\boldsymbol{\dfrac{na+mb}{m+n}}$



$a>b$ のときも同様に　$p=\dfrac{na+mb}{m+n}$

□線分ABを $m:n$ に**外分**する点を $\mathrm{Q}(q)$ とする．

まずは　$m>n$ のとき，点Qは半直線AB上にある．



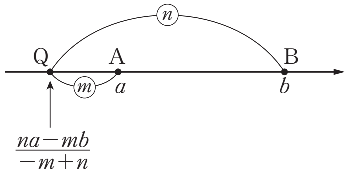
$a<b$ のとき

$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=m:n \iff (q-a):(q-b)=m:n$

$m(q-b)=n(q-a)$

$(m-n)q=mb-na$　　よって　$q=\boldsymbol{\dfrac{-na+mb}{m-n}}$

$a>b$ のときも同様に　$q=\dfrac{-na+mb}{m-n}$



次に $m<n$ のとき，点Qは半直線BA上にあり，

同様に　$q=\dfrac{na-mb}{-m+n}=\dfrac{-na+mb}{m-n}$ が成り立つ．

⇒　C&U ①

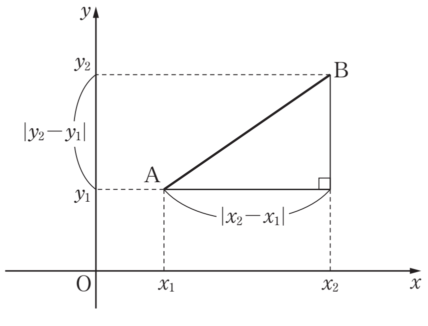
［2］　平面上の点の座標

□座標軸が定められた平面を**座標平面**という．

座標平面上の2点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ の距離は三平方の定理により

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

と表される．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

□特に原点 O と点 P$(x,\ y)$ の距離は $\mathrm{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$ である．

□2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を P$(x,\ y)$ とする．

A，B，P から x 軸に垂線 AA′，BB′，PP′ を下ろすと，

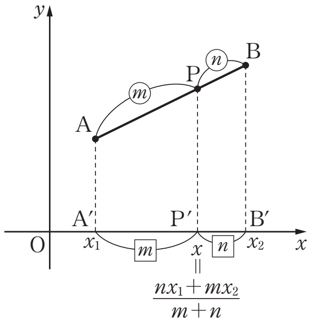
AP：PB＝A′P′：P′B′＝$m:n$　である．よって

内分点の公式により　$x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}$ である．

同様に，y 軸に垂線を下ろして考えれば，$y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$

である．

外分点についても同様に考えることができる．



□よって，以下のことがいえる．

> 2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を P，外分する点を Q とすると，
>
> 内分点　P$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$　　外分点　Q$\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$
>
> 特に，中点の座標は　$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

⇒　C&U 2

［3］　直線の方程式

□点 $(x_1,\ y_1)$ を通る直線を考える．

傾き m，y 切片 n の直線の方程式は

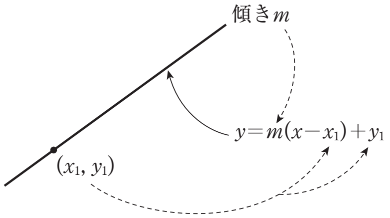
$y=mx+n$　……①

と表される．これが点 $(x_1,\ y_1)$ を通るとき

$y_1=mx_1+n$　……②

①－②より　$y-y_1=m(x-x_1)$

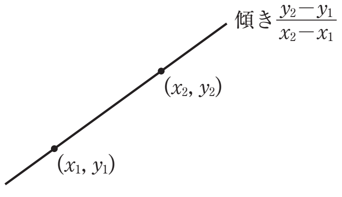
ゆえに　$\boxed{y=m(x-x_1)+y_1}$



□特に，異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線は，

$x_1\neq x_2$ のとき　直線の傾きは　$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ であることより

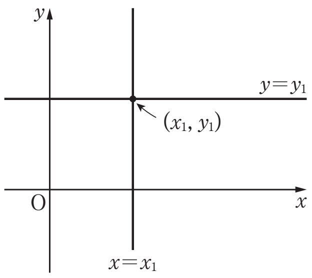
$\boxed{y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1}$ と表せる．



□傾きが 0 の場合は x 軸に平行な直線となり，その方程式は

$y=y_1$　となる．

□また $x_1=x_2$ のときは，x 軸に垂直（y 軸に平行）な直線となり，その方程式は　$x=x_1$　となる．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

□ a，b の少なくとも一方が 0 でなければ，$ax+by+c=0$ の表す図形は直線である．
この式を直線の方程式の**一般形**という．

⇒ C&U 3

［4］ 2直線の平行・垂直

□ 2 直線 l_1：$y=m_1x+n_1$，l_2：$y=m_2x+n_2$ が平行となるのは，$m_1=m_2$ のときである．

□ここでは垂直となるときを考える．

l_1 と l_2 を平行移動し，ともに原点を通るようにし，$y=m_1x$ と $y=m_2x$ が垂直になるための条件を考える．

直線 $y=m_1x$ と $y=m_2x$ の上にそれぞれ

点 P$(1,\ m_1)$，Q$(1,\ m_2)$ をとる．

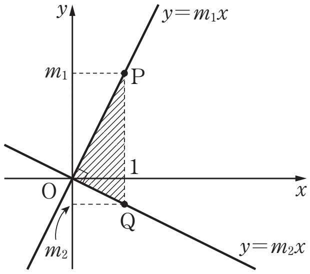
三平方の定理により　$PQ^2=OP^2+OQ^2$

$$(m_1-m_2)^2=(1+m_1{}^2)+(1+m_2{}^2)$$

よって　$m_1m_2=-1$

逆に $m_1m_2=-1$ ならば，上記を逆にたどることにより

2 直線 l_1，l_2 は垂直になる．



□したがって，

l_1 と l_2 が平行	$\Longleftrightarrow$	$m_1=m_2$	l_1 と l_2 が一致	$\Longleftrightarrow$	$m_1=m_2$ かつ $n_1=n_2$
l_1 と l_2 が垂直	$\Longleftrightarrow$	$m_1m_2=-1$			

である．

□一般に，2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$ と $a_2x+b_2y+c_2=0$ の位置関係について

平行	$\Longleftrightarrow$	$a_1b_2-a_2b_1=0$　$(a_1:a_2=b_1:b_2)$
一致	$\Longleftrightarrow$	$a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2$
垂直	$\Longleftrightarrow$	$a_1a_2+b_1b_2=0$

である．

⇒ C&U 4

［5］ 点と直線の距離

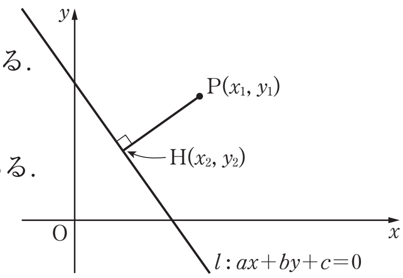
□点 P$(x_1,\ y_1)$ から方程式 $ax+by+c=0$ で表される直線 l に下ろした垂線 PH の長さを求めよう．

H$(x_2,\ y_2)$ とすると，$PH=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ である．

（i） $ab\neq0$ のとき

l の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるから，PH の傾きは $\dfrac{b}{a}$ である．

よって　$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{b}{a}$ より



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\begin{cases} x_2-x_1=at \\ y_2-y_1=bt \end{cases}$ ……①（t は実数）とおける.

したがって　$\mathrm{PH}=\sqrt{(at)^2+(bt)^2}=\sqrt{a^2+b^2}|t|$ である.

また H は直線 $ax+by+c=0$ 上の点であるから　$ax_2+by_2+c=0$ である.

これと①より $a(x_1+at)+b(y_1+bt)+c=0$

$(a^2+b^2)t=-ax_1-by_1-c$　　ゆえに　$t=-\dfrac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$

したがって　$\mathrm{PH}=\sqrt{a^2+b^2}\left|-\dfrac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}\right|=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(ii)　$ab=0$ のとき

$a=0$ ならば $b\neq0$　　このとき　$x_1=x_2$ であり，$\mathrm{PH}=|y_2-y_1|=\left|-\dfrac{c}{b}-y_1\right|$

$b=0$ ならば $a\neq0$　　このとき　$y_1=y_2$ であり，$\mathrm{PH}=|x_2-x_1|=\left|-\dfrac{c}{a}-x_1\right|$

これらは(i)の結果でそれぞれ $a=0$，$b=0$ とおいたときに等しい.

以上より，以下のことがいえる.

> 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は
>
> $$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

⇒　C&U 5

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1　直線上の点 A(-3)，B(5) に対し，線分 AB を次のように分ける点の座標を求めよ．

(1)　3：1 に内分する点 P　　(2)　4：1 に外分する点 Q　　(3)　1：2 に外分する点 R

2　3 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　線分 BC の中点 M の座標を求めよ．

(2)　三角形 ABC の重心 G の座標を求めよ．

3　次の直線の方程式を求めよ．

(1)　2 点 $(2,\ 3)$，$(-3,\ 8)$ を通る直線

(2)　$a\neq0$，$b\neq0$ のとき，2 点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ を通る直線

4　点 $(1,\ 2)$ を通り，直線 $3x+4y+5=0$ に平行な直線，および垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ．

5　3 点 O$(0,\ 0)$，A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ について，次の問いに答えよ．ただし，$x_1\neq0$ とする．

(1)　線分 OA の長さを求めよ．

(2)　点 B と直線 OA の距離 d を求めよ．

(3)　三角形 OAB の面積 S を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　図形と方程式(1)

1　2直線 $ax+y+1=0$ ……①，$x+ay-1=0$ ……②　について，次の問いに答えよ．

(1)　①と②が垂直に交わるときの a の値を求めよ．

(2)　①と②が交点をもたないときの a の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$\triangle ABC$ で，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ $L(4,\ -1)$，$M(-1,\ 1)$，$N(-2,\ -5)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ．

(2)　直線 AB の方程式，および点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さを求めよ．また，$\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(3)　$\triangle ABC$ の外心の座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　直線 $l : y=2x-3$ と点 $\mathrm{A}(5,\ 2)$ がある．次の問いに答えよ．

(1)　直線 l に関して，点 A と対称な点 B の座標を求めよ．

(2)　点 P が直線 l 上を動くとき，AP の長さの最小値を求めよ．また，点 $\mathrm{C}(6,\ 6)$ に対して，$\mathrm{AP}+\mathrm{PC}$ の値が最小となる点 P の座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　図形と方程式(1)

xy 平面上に２点 A(3, 2)，B(8, 9) と，直線 l：$y=x-3$ 上を動く点 P がある．AP＋PB の値が最小となるときの点 P の座標を求めよう．点 A を通り，直線 l に垂直な直線 m の方程式は $y=-x+$ ア である．また，直線 l と直線 m の交点 M の座標は (イ , ウ) である．ここで，直線 l に関して点 A と対称な点を A′(a, b) とおき，２点 A，A′ の中点の座標が点 M と一致することを利用すると，$a=$ エ ，$b=$ オ である．AP＋PB の最小値は A′P＋PB の最小値と等しく，それは直線 A′B 上に点 P が存在するときである．直線 A′B の方程式は $y=$ カ $x-$ キク であることより，点 P の座標は (ケ , コ) である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　図形と方程式(1)

【CHECK & UP】

1 P(p)，Q(q)，R(r) とする．

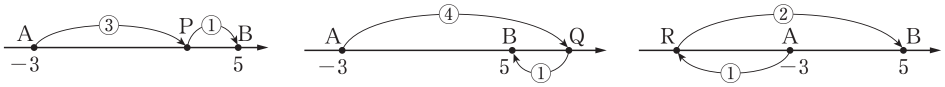
(1) $p=\dfrac{1\cdot(-3)+3\cdot5}{3+1}=3$　　よって　**P(3)**

(2) $q=\dfrac{(-1)\cdot(-3)+4\cdot5}{4-1}=\dfrac{23}{3}$　　よって　$\mathbf{Q\left(\dfrac{23}{3}\right)}$

(3) $r=\dfrac{2\cdot(-3)+(-1)\cdot5}{-1+2}=-11$

よって　**R(−11)**

(1)　　(2)　　(3)



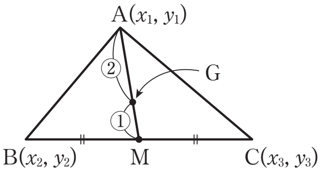
内分，外分ともにまずはその点を「図示」できるかがカギとなる．特に「線分 AB を」と「線分 BA を」の区別ができていること．「線分 AB を」は「A から B に向かって」であり，「線分 BA を」は「B から A に向かって」である．
　さらに「外分」に関しては，上記の方向を「正の方向」とすると，小さい数字の分だけ「負の方向」に戻るイメージ．よって「4：1 に外分」であれば，「4 行って 1 戻る」，「1：2 に外分」であれば，「1 戻って 2 行く」ということである．公式においては，戻る数字に「−」がつく．

2 (1) $\mathbf{M\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)}$

(2) 重心 G は中線 AM を 2：1 に内分する点である．

よって　$\left(\dfrac{1\cdot x_1+2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \dfrac{1\cdot y_1+2\cdot\dfrac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)$

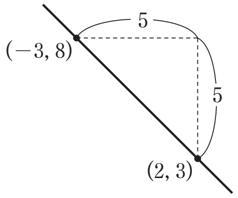
したがって　$\mathbf{G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)}$



中点は「1：1 に内分」する点である．
重心についてはこの結果を「公式」としつつも，それを導くのに用いた重心の性質および計算プロセスは忘れてはならない．

3 (1) 傾きは $\dfrac{-5}{5}=-1$

よって求める直線の方程式は
$y=-1(x-2)+3$
つまり　$\boldsymbol{y=-x+5}$



$y=ax+b$ に通る 2 点の座標を代入し，連立方程式を解くという「計算練習」はもはや不要であろう．また，座標を座標平面上にプロットすることは必ずしも必要がない．大切なのは与えられた 2 点の「相対的位置」である．それをつかんで図示することで，自ずと直線の「傾き」がわかる．この「傾き」と「通る 1 点」のペアは，直線を作成する際の最も多い条件の 1 つである．

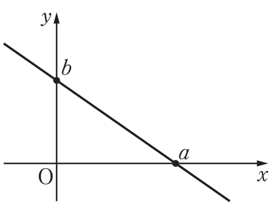
(2) 傾きは $\dfrac{-b}{a}=-\dfrac{b}{a}$

よって求める直線の方程式は

$y=-\dfrac{b}{a}x+b$

$b\neq0$ より $\dfrac{y}{b}=-\dfrac{x}{a}+1$

つまり　$\boldsymbol{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$



直線が x 軸，y 軸と交わる座標，すなわち x 切片，y 切片がともにわかるため，両軸を含めて図示した．傾きもすぐにわかるため，y 切片とあわせて直線の方程式はすぐにつくることができる．この式を左のように変形することでできた直線の方程式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ を「切片方程式」という．x 切片が a，y 切片が b とわかるときに使うことができる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4 直線 l：$3x+4y+5=0$ の傾きは $-\frac{3}{4}$ である．

よって点 $(1,\ 2)$ を通り直線 l と

平行な直線の方程式は　$y=-\frac{3}{4}(x-1)+2$

すなわち　$\boldsymbol{y=-\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}}$

$(3x+4y-11=0,\ 3(x-1)+4(y-2)=0)$

垂直な直線の方程式は　$y=\frac{4}{3}(x-1)+2$

すなわち　$\boldsymbol{y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}}$

$(4x-3y+2=0,\ 4(x-1)-3(y-2)=0)$

平行に加え,「垂直」な直線はこの分野では頻出のテーマである.「垂直」と「傾きの積が -1」を常に結びつけて考えられるようにしたい.
　また，作成した直線の方程式を「一般形」に直し，一般形で与えられたもとの直線の方程式と係数を比較してみると興味深い結果が得られる.
平行の場合は，x，y の係数が同じであり，また垂直の場合は，x，y の係数が逆になり，片方に $-$ がついたものとなっている.
ただし，容易な断言は危険である．例えば
$3x+4y-11=0$ と $6x+8y-22=0$
は，全く同じ直線の方程式を表しているが，x，y の係数は全く異なる．よって,「基礎確認事項」にもあったように,「比」で捉えられるようにしておくとよい.
　さらに，覚える必要はないが，点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に
平行な直線：$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$
垂直な直線：$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$ である.

5 (1)　$\boldsymbol{\mathrm{OA}=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}$

(2)　直線 OA の方程式は　$y=\frac{y_1}{x_1}x$

すなわち　$y_1x-x_1y=0$

よって点 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ と直線 OA の距離 d は

$$d=\frac{|y_1x_2-x_1y_2|}{\sqrt{y_1{}^2+(-x_1)^2}}=\boldsymbol{\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}}$$

(3)　$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}\cdot\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|}$

点と直線の距離の「公式」を活用しよう．まず直線の方程式を「一般形」にする.
その上で,
・一般形で表された直線の方程式における「x, y の係数をそれぞれ 2 乗して和をとり，$\sqrt{\quad}$ に入れた」ものが，求める距離の分母
・直線との距離を求めたい点を直線の一般形の式の左辺に「代入」して「絶対値をかぶせた」ものが，求める距離の分子
となる.
今回求めた三角形の面積の結果は「公式」として使うことができる．この「図形と方程式」の他に「ベクトル」において再登場する.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　図形と方程式(1)

1　2直線 $ax+y+1=0$ ……①，$x+ay-1=0$ ……②　について，次の問いに答えよ．

(1)　①と②が垂直に交わるときの a の値を求めよ．

(2)　①と②が交点をもたないときの a の値を求めよ．

(1)　①と②が垂直に交わるとき

$a\cdot1+1\cdot a=0$　　よって　$\boldsymbol{a=0}$

(2)　①と②が平行になるのは

$a\cdot a-1\cdot1=0$　　$a^2=1$　　よって　$a=\pm1$ のときである．

$a=-1$ のとき　①より　$-x+y+1=0$　　②より　$x-y-1=0$

よって①と②が一致するので不適．

$a=1$ のとき　①より　$x+y+1=0$　　②より　$x+y-1=0$

よって①と②は平行かつ一致せず，交点をもたない．

以上より　$\boldsymbol{a=1}$

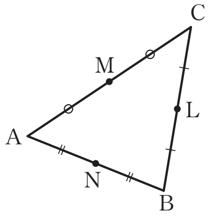
2　△ABCで，辺BC，CA，ABの中点をそれぞれL(4，−1)，M(−1，1)，N(−2，−5)とする．次の問いに答えよ．

(1)　点A，B，Cの座標をそれぞれ求めよ．

(2)　直線ABの方程式，および点Cから直線ABに下ろした垂線の長さを求めよ．また，△ABCの面積を求めよ．

(3)　△ABCの外心の座標を求めよ．

(1)　A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ とすると，条件より



$\dfrac{x_1+x_2}{2}=-2$，$\dfrac{x_2+x_3}{2}=4$，$\dfrac{x_3+x_1}{2}=-1$

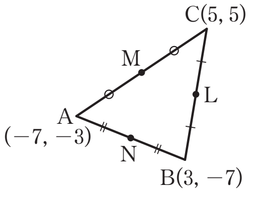
よって　$x_1+x_2=-4$，$x_2+x_3=8$，$x_3+x_1=-2$

これらより　$x_1=-7$，$x_2=3$，$x_3=5$

同様に　$\dfrac{y_1+y_2}{2}=-5$，$\dfrac{y_2+y_3}{2}=-1$，$\dfrac{y_3+y_1}{2}=1$ より　$y_1=-3$，$y_2=-7$，$y_3=5$

したがって　**A(−7，−3)，B(3，−7)，C(5，5)**

(2)　直線ABの傾きは　$\dfrac{-4}{10}=-\dfrac{2}{5}$



よって直線ABの方程式は　$y=-\dfrac{2}{5}(x+7)-3$

つまり　$\boldsymbol{y=-\dfrac{2}{5}x-\dfrac{29}{5}}$

点C(5，5)から直線AB：$2x+5y+29=0$ に下ろした垂線の長さ d は

$$d=\frac{|2\cdot5+5\cdot5+29|}{\sqrt{4+25}}=\boldsymbol{\frac{64}{\sqrt{29}}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，$AB=\sqrt{10^2+4^2}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$

よって　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{29}\cdot\frac{64}{\sqrt{29}}=\mathbf{64}$

(3)　求める外心は，線分 AB，線分 BC のそれぞれの垂直二等分線の交点である．

線分 AB の垂直二等分線は，線分 AB の中点 N を通り，AB に垂直な直線である．

その方程式は　$y=\frac{5}{2}(x+2)-5$　つまり　$y=\frac{5}{2}x$　……①

また，線分 BC の垂直二等分線は，線分 BC の中点 L を通り，BC に垂直な直線である．

その方程式は　$y=-\frac{1}{6}(x-4)-1$　つまり　$y=-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$　……②

よって求める外心の座標は，①と②の交点の座標　$\left(-\frac{1}{8},\ -\frac{5}{16}\right)$　である．

3　直線 $l : y=2x-3$ と点 A(5, 2) がある．次の問いに答えよ．

(1)　直線 l に関して，点 A と対称な点 B の座標を求めよ．

(2)　点 P が直線 l 上を動くとき，AP の長さの最小値を求めよ．また，点 C(6, 6) に対して，AP＋PC の値が最小となる点 P の座標を求めよ．

---

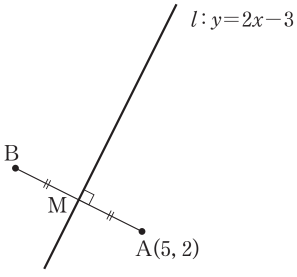
(1)　点 B の座標を $(a,\ b)$ とする．

直線 l と直線 AB が垂直であることより　$2\cdot\frac{b-2}{a-5}=-1$

つまり　$a+2b=9$　……①

線分 AB の中点 $M\left(\frac{a+5}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$ が直線 l 上にあることより

$\frac{b+2}{2}=2\cdot\frac{a+5}{2}-3$　つまり　$2a-b=-2$　……②



①，②より　$a=1,\ b=4$　　したがって　**B(1, 4)**

(2)　AP が最小となるのは，AP⊥l となるときで，このとき

P は(1)より点 M(3, 3) と一致する．

よって求める AP の最小値は　$AM=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

　また C(6, 6) に対して AP＋PC＝BP＋PC より，

AP＋PC　すなわち　BP＋PC の値が最小となるのは 3 点 B，P，C が

一直線上にあるときである．

直線 BC の方程式は　$y=\frac{2}{5}(x-1)+4$　つまり　$y=\frac{2}{5}x+\frac{18}{5}$

これと直線 l の交点が求める点 P である．

したがって　$\mathbf{P}\left(\frac{33}{8},\ \frac{21}{4}\right)$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　図形と方程式(1)

xy 平面上に2点A(3, 2), B(8, 9)と, 直線 l : $y=x-3$ 上を動く点Pがある. AP+PBの値が最小となるときの点Pの座標を求めよう. 点Aを通り, 直線 l に垂直な直線 m の方程式は $y=-x+$ [ア] である. また, 直線 l と直線 m の交点Mの座標は([イ], [ウ])である. ここで, 直線 l に関して点Aと対称な点をA′(a, b)とおき, 2点A, A′の中点の座標が点Mと一致することを利用すると, $a=$ [エ], $b=$ [オ] である. AP+PBの最小値はA′P+PBの最小値と等しく, それは直線A′B上に点Pが存在するときである. 直線A′Bの方程式は $y=$ [カ] $x-$ [キク] であることより, 点Pの座標は([ケ], [コ])である.

点Aを通り, 直線 l に垂直な直線 m の方程式は

$y=-1(x-3)+2$　つまり　$y=-x+\mathbf{5}$

直線 l と直線 m の交点の座標は　M(**4**, **1**)である.

直線 l に関して点Aと対称な点A′(a, b)について,

2点A, A′の中点の座標は　$\left(\dfrac{a+3}{2}, \dfrac{b+2}{2}\right)$

この点と点M(4, 1)が一致するとき

$\dfrac{a+3}{2}=4$, $\dfrac{b+2}{2}=1$　　よって　$a=\mathbf{5}$, $b=\mathbf{0}$

したがって　A′(5, 0)である.

直線A′Bの方程式は　$y=3(x-5)+0$　つまり　$y=\mathbf{3}x-\mathbf{15}$　であり, 点Pは直線A′Bと直線 l の交点であることより, P(**6**, **3**)である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。